

Title	Fatouノ定理二對スル小サナ注意
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 45 p.6-p.8
Issue Date	1935-06-18
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74075
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

153. Fatou の定理 = 對スル小サナ注意

吉田 耕作 (阪大)

$|z| < 1$ デ 正則ナ函数 $f(z)$ が有界ナラバ、 $f(z)$ ハ次ノ性質 (以下之ヲ性質 F ト名ヅケル) ヲ有スル。

高々 *measure 0* ナル θ ノ集合ヲ除イテ $\lim_{r \rightarrow 1-0} f(re^{i\theta})$ が存在スル。

之有名ナ *Fatou* ノ定理ヲ証明スルノ = 普通ハ *Poisson* 積分カラ出發スルガ、 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $0 \leq r < 1, \theta = \theta_0$ ノ *Bild* ノ長サ $l(r, \theta_0) = \int_0^r |f'(re^{i\theta_0})| dr$ が $r \rightarrow 1-0$ ナルトキ有限ナ極限ヲモテバ明 = $\lim_{r \rightarrow 1-0} f(re^{i\theta})$ ハ exist スルカラ、

r ノ増加函数 $l(r, \theta)$ が高々 *measure 0* ナル θ ノ集合ヲ除イテ r ニツイテ有界 (其ノ *Schranke* ハ $\theta =$ depend シテモヨイ) ナルコトが云ヘレバ *Fatou* ノ定理が証明サレ同時ニ其ノ幾何學的意味が明ニナル訳デアルガ

$f(z)$ の有界性から上ノコトハ出ソウモナイ。

ソコデ $f(z)$ の有界性ノ代リニ

$$S(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} |f'(te^{i\theta})|^2 t dt d\theta < M, \quad r < 1$$

ヲ 假定スレバ Schwarz ノ不等式ヨリ

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \{l(r, \theta) - l(r_0, \theta)\}^2 d\theta &\leq \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{r_0}^r \frac{dt}{t} \int_0^{2\pi} |f'(te^{i\theta})|^2 t dt \right\} d\theta \\ &\leq 2\pi \log \frac{r}{r_0} \cdot S(r) \leq 2\pi M \log \frac{1}{r_0}. \end{aligned}$$

$l(r, \theta)$ ハ r ノ 増加函数デカラ之ヨリ

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \{l(r, \theta) - l(r_0, \theta)\}^2 d\theta \\ = \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 1-0} \{l(r, \theta) - l(r_0, \theta)\}^2 d\theta \leq 2\pi M \log \frac{1}{r_0} \end{aligned}$$

ヲ得テ高々 *measure 0* ナル θ ノ 集合ヲ除イテ $\lim_{r \rightarrow 1-0} l(r, \theta)$ ノ有限ナコト、從ツテ $f(z)$ が性質 F ヲ有スルコトガワカル。

上ノ長サ, 面積ノ代リニ *spherical* ノ長サ, 面積ヲ用フレバ, $f(z)$ が $|z| < 1$ デ *meromorphic* ナ時ニ

$$A(r, f) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{|f'(te^{i\theta})|^2}{(1 + |f(te^{i\theta})|^2)^2} t dt d\theta$$

ノ有界性ヲ假定スレバ $f(z)$ が性質 F ヲ有スルコトヲ示セル。

所デ *Nevanlinna* ハ Fatou ノ定理ヲ使ツテ

$T(r, f)$ が有界ナル如キ $f(z)$ が性質 F ヲ有スルコトヲ示シ

ニアルカラ、上ニヤツタコトハ Nevanlinna = ヨツテ
擴張サレタ Fatou ノ定理 ノ特別ノ場合ヲ取扱ツタ = 過ギナ

$$1. \left(T(r, f) = \frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{A(t, f)}{t} dt \text{ ダカラ} \right)$$

併シ等角寫像論等デ層々出會フ、 $f(z)$ が單葉或ヒハ
複葉ナル場合ナドハ Fatou ノ定理 = 立戻ラズ上ノ如ク証明
シタ方が簡單デモアルシワカリヤスイト思ヒマス。尚上ノ証
明方針ヲ適當ニ *modify* スレバ Fatou ノ定理ハ得ラ
レルノデアツテ、コノ定理ガ陳述シテアル *essential* ノ
意味? ハソコニ見出サレルノデハナイデセウカ。